

Ecuaciones Diferenciales II Examen IV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Ecuaciones Diferenciales II Examen IV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Granada, 2026

Asignatura Ecuaciones Diferenciales II.

Curso Académico 2023/2024.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Primera prueba de clase.

Fecha 10 de Abril de 2024.

Ejercicio 1. Nos dan dos funciones de clase C^1 ,

$$\begin{aligned} X_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\longmapsto X_i(t, x), \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

y se supone que $X_1(t, x) = X_2(t, x)$ si $t \in \mathbb{R}$, $|x| \leq 2$. Para cada $i = 1, 2$ la función $x_i : I_i \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto x_i(t)$ es una solución del problema

$$x' = X_i(t, x), \quad x(0) = 0.$$

¿Se puede asegurar que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ coinciden en un entorno de $t_0 = 0$?

Ejercicio 2. Demuestra la existencia de un número real $r > 0$ y dos funciones continuas $x, y : [-r, r] \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumplen

$$x(t) = 2e^{\int_0^t y(s) ds}, \quad y(t) = e^{-3 \int_0^t x(s) ds},$$

para cada $t \in [-r, r]$.

Ejercicio 3. Encuentra una solución maximal del problema

$$x' = t^2 \sqrt{x^+}, \quad x(0) = 1$$

donde $x^+ = \max(x, 0)$. ¿Hay unicidad local? ¿y global?

Ejercicio 4. Dado el intervalo abierto $I =]-1, 1[$ se supone que $\mathcal{F} \subset C(I)$ es un conjunto de funciones continuas $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente propiedad:

Si $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ cumplen $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ para algún $t_0 \in I$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f_1(t) = f_2(t)$, $\forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$.

Demuestra que existe a lo sumo una función que cumple $f \in \mathcal{F}$, $f(0) = 3$.

Ejercicio 5. Se supone que $\{x_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de funciones en $C^1[-1, 1]$ que cumplen, para cada $t \in [-1, 1]$,

$$|\dot{x}_n(t)| \leq 6, \quad \left| x_n(t) - 7 - 3 \int_0^t \frac{x_n(s)}{1 + x_n(s)^2} ds \right| \leq \frac{1}{n}.$$

- Prueba que existe una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge uniformemente en $[-1, 1]$ a una función límite $x(t)$.
- Encuentra un problema de valores iniciales del que es solución $x(t)$.
- Prueba que la sucesión $\{x_n\}$ converge uniformemente.